6 ÇARPIM VE BÖLÜM UZAYLARI

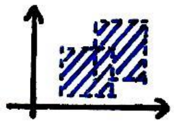
6.1 Çarpım Uzayları

X bir küme, $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in I}$ topolojik uzaylar ailesi olsun. Şimdi, $f_\alpha: X\to X_\alpha$ fonksiyon aileleri ile $g_\alpha: X_\alpha\to X$ fonksiyon ailelerini düşünelim. X üzerinde her bir f_α fonksiyonlarını sürekli yapan en zayıf topoloji ile X üzerinde her bir g_α fonksiyonlarını sürekli yapan en kuvvetli topolojiyi bulmaya çalışalım.

Önce, $X\times Y$ üzerinde, daha sonra da genel kartezyen çarpımlarda çarpım topolojisini verelim.

Tanım: (X,τ_X) ve (Y,τ_Y) topolojik uzaylar olsun. $X\times Y$ üzerinde $U\in\tau_X$ ve $V\in\tau_Y$ olmak üzere $U\times V$ kümelerini baz kabul topolojiye <u>çarpım topolojisi</u> denir.

($U\times V$'yi topolojinin elemanları alsak, birleşimleri topolojinin elemanları olmazdı.)



$U\times V = U\times Y \cap X\times V$ olduğundan $\{U\times Y, X\times V \mid U\in\tau_X, V\in\tau_Y)$ kümeleri çarpım topolojisi için bir altbazdır.

$P_1: X\times Y\to X$, $P_1(x,y)=x$, $\qquad P_2: X\times Y\to Y$, $P_2(x,y)=y$

izdüşüm fonksiyonları olsun. Çarpım topolojisi, $X\times Y$ kartezyen çarpımı üzerinde P_1 ve P_2 fonksiyonlarını sürekli yapan en zayıf (weakest) topolojidir.

$U\in\tau_X$, $P_1^{-1}(U)=U\times Y$ ve $V\in\tau_Y$, $P_2^{-1}(V)=X\times V$ kümeleri $X\times Y$'de açıktır.

Teorem: $S'=\{P_1^{-1}(U), P_2^{-1}(V) \mid U\in\tau_X, V\in\tau_Y\}$ ailesi, $X\times Y$ üzerindeki çarpım topolojisi için bir altbazdır.

Kanıt: $X\times Y$ üzerindeki çarpım topolojisini τ^* ve S''yi alt baz kabul eden topolojiyi τ_S ile gösterelim. S'nin elemanları τ^*'ın elemanları olduğundan sonlu kesişimlerin keyfi birleşimleri de τ^*'ın elemanlarıdır. Yani, $\tau_S\subset\tau^*$dır. τ^*'ın baz elemanları $U\times V$'leri $U\times V = P_1^{-1}(U)\cap P_2^{-1}(V)$ şeklinde elde ettiğimizden $\tau^*\subset\tau_S$ dir. Böylece kanıt tamamlanır. ∎

Şimdi, bu tanımı, topolojik uzayların herhangi bir kartezyen çarpımına genelleyelim. $\alpha\in I$ olmak üzere (X_α,τ_α) topolojik uzaylar ve $\prod_\alpha X_\alpha=\{x \mid x: I\to\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha,\ x_\alpha\in X_\alpha\}$ kartezyen çarpımı üzerinde iki topoloji verebiliriz.

Birincisi, $U_\alpha \in \tau_\alpha$ olmak üzere $\prod U_\alpha$ kümelerini baz kabul eden topolojidir. İkincisi ise $P_\gamma : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to X_\alpha$, $P_\gamma((x_\alpha)_{\alpha\in I}) = x_\gamma$ izdüşüm fonksiyonlarını sürekli yapan X'deki en zayıf topolojidir. Genel olarak, bu iki topoloji aynı değildir.

Tanım: $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in I}$ topolojik uzaylar olmak üzere $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ üzerinde <u>kutu (box) topolojisi</u> $U_\alpha \in \tau_\alpha$ $(\alpha\in I)$ olmak üzere $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ kümelerini baz kabul eden topolojiye denir.

Tanım: $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in I}$ topolojik uzaylar olmak üzere $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ üzerinde <u>çarpım topolojisi</u> $U_\alpha \in \tau_\alpha$ olmak üzere $\bigcup_{\alpha\in I} \{P_\gamma^{-1}(U_\alpha)\}$ kümesini altbaz kabul eden topolojiye denir.

Kutu ve çarpım topolojileri I sonlu küme olursa aynıdır. Diğer durumda, kutu topolojisi çarpım topolojisinden daha kuvvetlidir.

Üzerinde çarpım topolojisi tanımlanan $\prod X_\alpha$ kümesine <u>çarpım uzayı</u> denir.

Teorem: Bir $\{x_\gamma\}_{\gamma\in J}$ netinin $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ çarpım uzayında yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \alpha\in I$ için $\{P_\alpha(x_\gamma)\}_{\gamma\in J}$'nın (X_α, τ_α)'da yakınsak olmasıdır.

Kanıt: $\{x_\gamma\}_{\gamma\in J}$ neti, $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ çarpım uzayında $x_\gamma \to x$'e yakınsasın. $\alpha_0 \in I$ alalım. V, $(X_{\alpha_0}, \tau_{\alpha_0})$ topolojik uzayında $P_{\alpha_0}(x)$'in herhangibir komşuluğu olsun. $P_{\alpha_0}^{-1}(V)$, x_0'ın bir komşuluğudur. $\{x_\gamma\}_{\gamma\in J}$, $P_{\alpha_0}^{-1}(V)$'de kalıntısal olduğundan $\{P_{\alpha_0}(x_\gamma)\}_{\gamma\in J}$, V'de kalıntısaldır. Yani $P_{\alpha_0}(x_\gamma) \to P_{\alpha_0}(x)$ dir.

Teoremin tersi çalışma sorusudur. ■

Örnek: $I = \mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$ için $X_k = (-2,2)$ ve τ_k doğal topoloji olsun. $x_n \in \prod_k X_k$ elemanı $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots)$ olsun. Her $k\in I=\mathbb{N}$ için $P_k(x_n) = \frac{1}{n}$ dir. Açıktır ki her k için $n\to\infty$ iken $P_k(x_n)\to 0$ dır. Buna göre, $\{x_n\}$ dizisi $\prod_k X_k$ çarpım uzayında z noktasına yakınsar. Burada, z, her k için $P_k(z)=0$ ile verilen noktadır.

Bununla beraber, $\{x_n\}$ dizisi kutu topolojisinde z noktasına yakınsamaz. Şimdi, bunu gösterelim. $k\in\mathbb{N}$ için $A_k = (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \in \tau_k$ ve $G = \prod_k A_k$ alalım. G kutu topolojisinde açık kümedir ve z'nin bir komşuluğudur. Fakat herhangibir $n\in\mathbb{N}$ için $x_n \notin G$ dir. Bu yüzden, $\{x_n\}$ kutu topolojisine göre yakınsamaz. Eğer yakınsasaydı limiti çarpım topolojisindeki z noktası olmalıydı.

Teorem: X herhangibir küme ve $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ çarpım uzayı olsun. $\forall\alpha\in I$ için $f_\alpha : X\to X_\alpha$ olmak üzere $f: X\to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, $f(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha\in I}$ fonksiyonu verilsin. f'nin sürekli olması için gerek ve yeter şart her f_α fonksiyonunun sürekli olmasıdır.

Kanıt: Çalışma sorusu. ■

Örnekler: 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots$, $f(t)=(t,t,t,\cdots)$ fonksiyonu $f_n: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(t)=t$ koordinat fonksiyonları sürekli olduğundan çarpım topolojisinde f, süreklidir. Fakat kutu topolojisinde f sürekli değildir. Gerçekten, $B=(-1,1)\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\times(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})\times\ldots$ kutu topolojisinin elemanıdır. $f^{-1}(B)$, 0'ı içermelidir. $\exists\,\delta>0$, $(-\delta,\delta)\subset f^{-1}(B)$. $\forall\, n\in\mathbb{N}$ için her iki tarafın P_n izdüşümünü alırsak $(-\delta,\delta)\subset(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ keyfi n için olanaksızdır. Yani, f sürekli olamaz.

2) 24.05.2007 (Final Sınavı) Soru 1: b) (10 puan) (X,τ) topolojik uzay ve $(X\times X,\tau)$ çarpım uzayı olsun. X'in köşegen $\Delta=\{(x,x)\,|\,x\in X\}$'ya homeomorfik olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f: X\to\Delta\subset X\times X$, $f(x)=(x,x)$ olarak tanımlayalım. $x_1\neq x_2$ için $(x_1,x_1)\neq(x_2,x_2)$ olduğundan, f bire-birdir. $\forall (x,x)\in\Delta$ için $\exists\, x\in X$ vardır ki $f(x)=(x,x)\in\Delta$ olduğundan da f üzerinedir. $U,V\in\tau$ olmak üzere keyfi $(U\times V)\cap\Delta$ açık kümesinin ters görüntüsü

$$f^{-1}((U\times V)\cap\Delta)=U\cap V\in\tau$$

olduğundan, f süreklidir. Keyfi $U\in\tau$ için

$$(f^{-1})^{-1}(U)=f(U)=(U\times V)\cap\Delta$$

Δ'da açık olduğundan f^{-1} süreklidir. Yani, f homeomorfizmdir. $X\cong\Delta$ dır.

6.2 Bölüm Uzayları

Tanım: f fonksiyonu, (X,τ_X) topolojik uzayından (Y,τ_Y) topolojik uzayına giden bir fonksiyon olsun. Eğer X'deki her açık (kapalı) kümenin görüntüsü Y'de açık (kapalı) ise bu fonksiyona, <u>açık (kapalı) fonksiyon</u> denir.

Örnekler: 1) $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{a\}\}$, $f:X\to X$, $f(x)=a$ ile tanımlanan fonksiyon $f(\emptyset)=\emptyset\in\tau$, $f(X)=\{a\}\in\tau$, $f(\{a\})=\{a\}\in\tau$ olduğundan, açık fonksiyondur. $\{b,c\}$ kapalı, ama $f(\{b,c\})=\{a\}$ kapalı olmadığından f kapalı fonksiyon değildir.

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ doğal topolojide $f(x)=3$ fonksiyonu kapalı bir fonksiyondur. Açık değildir.

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ fonksiyonu açık fonksiyon değildir. Çünkü, $(-1,1)$ kümesinin görüntüsü $f((-1,1))=[0,1)$ açık değildir. (Doğal topolojide)

4) $P_1,P_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ doğal topolojilerinde $P_1((x,y))=x$, $P_2((x,y))=y$ izdüşüm fonksiyonları açık fonksiyonlardır. Gerçekten, $\beta=\{(a,b)\times(c,d)\mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^2$'de τ doğal topolojisi için bir bazdır. Buna göre, $P_1((a,b)\times(c,d))=(a,b)$ açıktır. $\mathbb{R}^2$'de herhangibir U açık kümesi $U=\bigcup_\alpha(a_\alpha,b_\alpha)\times(c_\alpha,d_\alpha)$ formunda olduğundan $P_1(U)=\bigcup_\alpha(a_\alpha,b_\alpha)$ açık kümedir.

Tanım: f fonksiyonu (X,τ_X) topolojik uzayından (Y,τ_Y) topolojik uzayına giden üzerine bir fonksiyon olsun. Eğer, f fonksiyonu, Y'deki her U kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart $f^{-1}(U)$'nun X'de açık olmasıdır şartını sağlıyorsa, f'ye <u>bölüm fonksiyonu</u> denir.

Bu tanım, süreklilik tanımından daha kuvvetli bir şart içerdiğinden bu tanıma, "kuvvetli süreklilik" de denir.

Örnekler: 1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ doğal topolojide, $f(x)=3$ fonksiyonu kapalı ve sürekli bir fonksiyondur. Fakat bölüm fonksiyonu değildir.

Uyarı: Eğer, f üzerine, sürekli ve kapalı (veya açık) ise f bölüm fonksiyonudur.

2) $(\mathbb{R},\tau)$'da $X=[0,1]\cup[2,3]$, $Y=[0,2]$ ve $f:X\to Y$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1]\\ x-1, & x\in[2,3]\end{cases}$ olsun. f fonksiyonu üzerine, sürekli ve kapalı bir fonksiyondur. Dolayısıyla, bölüm fonksiyonudur. Fakat, bu fonksiyon, açık fonksiyon değildir. Gerçekten, $(\frac{1}{2},1]$, X'de açık küme iken $f((\frac{1}{2},1])=(\frac{1}{2},1]$, $Y=[0,2]$'de açık küme değildir.

2') $(\mathbb{R},\tau)$'da $f:[0,2]\to Y=[0,1)\cup[2,3]$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1)\\ x+1, & x\in[1,2]\end{cases}$ fonksiyonunu düşünümüz.

3) 22.04.2015 (Vize Sınavı II) Soru 4: b) (8 puan) i) Açık olmayan, kapalı bir fonksiyona örnek veriniz. ii) Bölüm fonksiyonu olmayan, sürekli bir fonksiyona örnek veriniz.

Çözüm: i) $A=[0,1)\cup[2,3]$ ve $Y=[0,2]$, $(\mathbb{R},\tau)$'nun altuzayları olmak üzere $f:A\to Y$, $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1) \\ x-1, & x\in[2,3]\end{cases}$ ile verilen fonksiyon kapalı fonksiyondur. (A'daki her kapalı kümenin görüntüsü Y'de kapalıdır.) $U=[2,\frac{5}{2})$, A'da açık bir kümedir. (Yani $U\in\tau_A$ dır.) $f(U)=[1,\frac{3}{2})$ kümesi Y'de açık olmadığından, f fonksiyonu açık fonksiyon değil.

ii) $X=\{a,b,c\}$, $\tau_1=2^X$ ve $\tau_2=\{\emptyset,X\}$ olsun. $i:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$, $i(x)=x$ birim fonksiyonu süreklidir. $A=\{a,b\}=i^{-1}(\{a,b\})$ kümesi (X,τ_1)'de açık, (X,τ_2)'de açık olmadığından i bölüm fonksiyonu değildir.

Teorem: $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ bire-bir, üzerine bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1) f bir homeomorfizmdir, 2) f açık fonksiyondur, 3) f kapalı fonksiyondur.

Kanıt: (1)⇒(2) $U\in\tau_X$ için $f(U)=(f^{-1})^{-1}(U)$ açık olduğundan f açıktır.

(2)⇒(3) f, bire-bir, üzerine olduğundan A kapalı bir küme ise $f(A^c)=f(A)^c$ olduğundan $f(A)$ kapalıdır.

(3)⇒(1) $U\in\tau_X$ için $(f^{-1})^{-1}(U)=f(U)$ açıktır, f homeomorfizmdir. ■

Tanım: (X,τ_X) topolojik uzay, Y keyfi bir küme ve $f:X\to Y$ üzerine bir fonksiyon olsun. Y üzerinde, f'yi bölüm fonksiyonu yapacak yalnız bir topoloji vardır. Bu topolojiye f tarafından doğrulan (üretilen) <u>bölüm topoloji</u> denir ve $\tau(f)$ ile gösterilir.

Yani $\tau(f)=\{U\subset Y \mid f^{-1}(U)\in\tau\}$ dır. Şimdi, $\tau(f)$'in Y üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

i) $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\tau_X \Rightarrow \emptyset\in\tau(f)$, $f^{-1}(Y)=X\in\tau_X \Rightarrow Y\in\tau(f)$.

ii) $U_1,U_2,\dots,U_n\in\tau(f)$ ise $f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n}U_i)=\bigcap_{i=1}^{n}f^{-1}(U_i)\in\tau_X$ olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\tau(f)$ dir.

iii) $\alpha\in I$ için $U_\alpha\in\tau(f)$ ise $f^{-1}(\bigcup_{\alpha}U_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(U_\alpha)\in\tau_X$ 〃 $\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha\in\tau(f)$ dir.

Teorem: Yukarıdaki tanımda, f fonksiyonunu sürekli yapan Y'de en kuvvetli topoloji $\tau(f)$'dir.

Kanıt: τ_Y, Y'de f'yi sürekli yapan herhangibir topoloji olsun. $\forall U\in\tau_Y$ için $f^{-1}(U)\in\tau_X$ dir. Bu ise U'nun $U\in\tau(f)$ olduğunu gösterir. Yani $\tau_Y\subset\tau(f)$ dir. ■

Teorem: $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ üzerine sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer, f açık veya kapalı ise $\tau(f)=\tau_Y$ dir.

Kanıt: f'nin açık olduğunu kabul edelim. $\tau(f)$, Y'de f'yi sürekli yapan en kuvvetli topoloji olduğundan, f'nin sürekliliğinden $\tau_Y\subset\tau(f)$ dir. Şimdi, keyfi $U\in\tau(f)$ alalım. $f^{-1}(U)\in\tau_X$ dir. f üzerine ve açık olduğundan $f(f^{-1}(U))=U\in\tau_Y$ dir. Yani, $\tau(f)\subset\tau_Y$ dir. Sonuçta $\tau_Y=\tau(f)$ elde edilir. ■

Örnekler: 1) $(\mathbb{R},\tau)$ doğal topoloji, $Y=\{-1,0,1\}$ ve $f:\mathbb{R}\to Y$, $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ olsun.
$f^{-1}(\{1\})=(0,\infty)\in\tau$, $f^{-1}(\{-1\})=(-\infty,0)\in\tau$ (ve diğerleri) olduğundan Y'de bölüm topolojisi $\tau(f)=\{\emptyset, Y, \{-1\},\{1\},\{-1,1\}\}$ dir.

2) 22.04.2015 (Vize Sınavı II) Soru 4: c) (10 puan) $X=\{a,b,c,d\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,b\},\{a,b,d\}\}$ $Y=\{1,2,3\}$ ve f, $f(a)=f(b)=1, f(c)=2, f(d)=3$ ile tanımlanan fonksiyon ise Y'deki bölüm topolojisi $\tau(f)$'i bulunuz.

Çözüm: $\tau(f)=\{U\subset Y \mid f^{-1}(U)\in\tau\}=\{\emptyset, Y, \{1\}, \{1,3\}\}$.

(X,τ_X) topolojik uzayı ve X üzerinde $\sim$ denklik bağıntısı verilsin. $X/\sim=\{[x]\mid x\in X\}$ denklik sınıflarının (bölüm kümesi) kümesi olmak üzere $f:X\to X/\sim$ $f(x)=[x]$ bölüm fonksiyonunu düşünelim.

Tanım: (X,τ) topolojik uzay, $\sim$, X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $f:X\to X/\sim$, $f(x)=[x]$ doğal fonksiyon olsun. $X/\sim$ üzerinde, f tarafından doğrulan bölüm topolojisi $\tau(f)$ ile $(X/\sim,\tau(f))$ topolojik uzayına, <u>bölüm uzayı</u> denir.

(X,τ_X) ve (Y,τ_Y) topolojik uzaylar ve $f:X\to Y$ sürekli ve üzerine bir fonksiyon olsun. $x,y\in X$ için $\sim$ bağıntısı $x\sim y \Leftrightarrow f(x)=f(y)$ ile verilsin.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\hat{f}\circ q=f$, $\quad \hat{f}$ bire-bir ve üzerinedir.

Teorem: (X,τ_X) ve (Y,τ_Y) topolojik uzaylar ve $f:X\to Y$ üzerine, sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer, f açık veya kapalı ise $\hat{f}$, $(X/\sim,\tau(f))$'den (Y,τ_Y)'ye bir homeomorfizmdir.

Kanıt: Çalışma sorusu. Burada $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$ dır. ■

Örnekler: 1) $X=[0,1]\subset\mathbb{R}$ doğal topolojik uzayı ve X üzerinde denklik bağıntısı $\sim$, $0\sim1$, $\forall x\in(0,1)$ için $x\sim x$ ile verilsin. $X/\sim=\{[0],[x]\mid x\in(0,1)\}=\{\{0,1\},\{x\}\mid x\in(0,1)\}$ dir. $X/\sim$ ile $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$ çemberi homeomorfiktir. Gerçekten $\hat{f}:X/\sim\to S^1$, $\hat{f}([x])=e^{2\pi i[x]}=(\cos 2\pi[x], \sin 2\pi[x])$ bir homeomorfizmdir.

2) $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}\subset\mathbb{R}^2$ doğal topolojik uzayı ve X üzerinde denklik bağıntısı $\sim$,

$\forall (x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<1\} \Rightarrow (x,y)\sim(x,y)$

$\forall (x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\} \Rightarrow (x,y)\sim(1,0)$

ile verilsin. $X/\sim$, $\mathbb{R}^3$'de birim küre $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$'e homeomorfiktir.

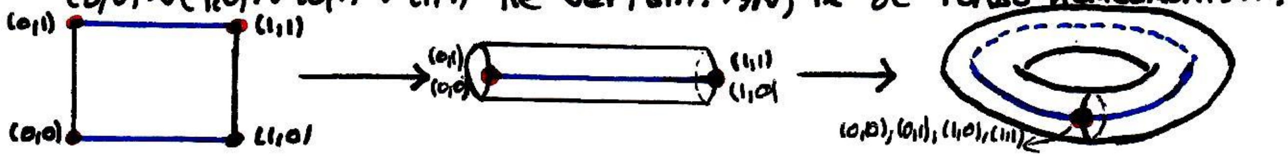
3) $X=[0,1]\times[0,1]\subset\mathbb{R}^2$ doğal topolojik uzayı ve X üzerinde denklik bağıntısı $\sim$,

$\forall (x,y)\in\{(x,y)\in X\mid 0<x<1,\ 0<y<1\} \Rightarrow (x,y)\sim(x,y)$

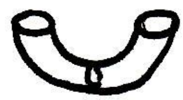
$\forall (x,y)\in\{(x,y)\in X\mid 0<x<1,\ y=0 \text{ veya } y=1\} \Rightarrow (x,y)\sim(x,0)$

$\forall (x,y)\in\{(x,y)\in X\mid x=0 \text{ veya } x=1,\ 0<y<1\} \Rightarrow (x,y)\sim(0,y)$

$(0,0)\sim(1,0)\sim(0,1)\sim(1,1)$ ile verilsin. $X/\sim$, $\mathbb{R}^3$'de torusa homeomorfiktir.



4) 23.04.2008 (Ödev II) Soru 2: b) (12 puan) $\mathbb{R}^3$'de aşağıdaki içi boş U borusuna homeomorfik olan $\mathbb{R}^2$'nin alt uzayında bulacağınız bölüm uzayının denklik bağıntısını yazınız.

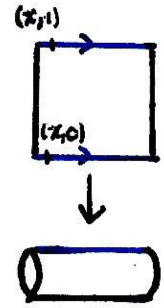


Çözüm: $X=[0,1]\times[0,1]\subset\mathbb{R}^2$ alır ve denklik bağıntısını;

$(x,y)\in\{(x,y)\mid 0<x<1,\ 0<y<1\}$ ise $(x,y)\sim(x,y)$

$(x,y)\in\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ y=0 \text{ veya } y=1\}$ ise $(x,0)\sim(x,1)$

şeklinde seçersek bu denklik bağıntısı ile elde edilen bölüm uzayı yukarıdaki şekle homeomorfiktir.



5) 24.05.2007 (Final Sınavı) Soru 1: a) (10 puan) $X=\{a,b,c,d\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ ve $[a]=[c]=\{a,c\}$ $(a\sim c)$, $[b]=\{b\}$ $(b\sim b)$, $[d]=\{d\}$, $(d\sim d)$ ise $X/\sim$ bölüm uzayını bulunuz.

Çözüm; $X/\sim=\{[a],[b],[d]\mid a,b,d\in X\}=\{\{a,c\},\{b\},\{d\}\}$, $f: X\to X/\sim$ $f(x)=[x]$ ile tanımlanan doğal fonksiyonun bölüm fonksiyonu olması gerekir.

$f(a)=f(c)=[a]=\{a,c\}$, $f(b)=[b]=\{b\}$, $f(d)=[d]=\{d\}$

$f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\tau$, $f^{-1}(X/\sim)=X\in\tau$, $f^{-1}(\{a,c\})=\{a,c\}\in\tau$, $f^{-1}(\{b\})=\{b\}\in\tau$, $f^{-1}(\{d\})=\{d\}\notin\tau$,

$f^{-1}(\{a,c\},\{b\})=\{a,b,c\}\in\tau$, $f^{-1}(\{a,c\},\{d\})=\{a,c,d\}\notin\tau$, $f^{-1}(\{b\},\{d\})=\{b,d\}\notin\tau$.

$\tau(f)=\{\emptyset, X/\sim, \{a,c\}, \{b\}, \{\{a,c\},\{b\}\}\}=\{\emptyset, X/\sim, [a], [b], \{[a],[b]\}\}$.

$(X/\sim, \tau(f))$ bölüm uzayıdır.